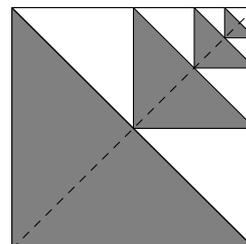


Thème : suites

CAPEX 2014

L'exercice

En traçant la diagonale d'un carré de côté a , on obtient un triangle rectangle que l'on colore en gris, comme sur la figure ci-contre. On recommence de la même manière dans le quart en haut à droite du carré, et ainsi de suite...



Calculer l'aire de la partie grisée.

Les réponses de deux élèves

Élève 1

Le carré a pour aire a^2 . Le premier triangle gris a donc une aire de $0,5a^2$. Le deuxième triangle a des côtés deux fois plus petits et a donc une aire 4 fois plus petite donc $0,25 \times 0,5a^2$. De même pour le troisième et le quatrième qui ont pour aires respectives $0,25 \times 0,25 \times 0,5a^2$ et $0,25 \times 0,25 \times 0,25 \times 0,5a^2$. Au final, l'aire grisée est de $0,5a^2(1 + 0,25 + 0,25^2 + 0,25^3) = 0,6640625a^2$

Élève 2

Notons a_1 l'aire du premier triangle. On a $a_1 = \frac{1}{2}a^2$. Les triangles sont tous des réductions du précédent avec un coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs et donc de $\frac{1}{4}$ pour les aires. D'où, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$, c'est donc une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}a^2$ et de raison $\frac{1}{4}$. Utilisons un algorithme pour trouver la somme de toutes ces aires quand le nombre de triangles devient très grand pour $a = 1$:

entrée	demandeur n
initialisation	aire prend la valeur 0,5 S prend la valeur 0
traitement	pour k allant de 1 à n S prend la valeur $S + \text{aire}$ aire prend la valeur $0,25 \times \text{aire}$
sortie	fin pour afficher S

Pour $n = 10$ cet algorithme renvoie 0,6666660309 ; pour $n = 50$ et pour $n = 100$, cet algorithme renvoie $S = 0,666666667$. On peut donc dire que l'aire grisée est $\frac{2}{3}a^2$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez les productions de ces deux élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et des outils utilisés, ainsi que l'engagement dans une activité de recherche.
- 2- Proposez, en vous appuyant sur les productions des élèves, une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.
- 3- Présentez deux ou trois exercices sur les *suites* dont l'un au moins fait appel à un algorithme. Vous préciserez les compétences visées par ces exercices.